Notatka o optymalizacji numerycznego wyliczania położenia opiektów dla 16-bitowego systemu dwusonarowego

Łukasz Małek

Wrocław, 21 listopada 2006

1 Wstęp

Obiektem naszych zainteresowań będzie układ składający się z dwóch sonarów umieszczonych w jednej linii. Zakładamy, że dysponujemy 16 bitowym układem mikroprocesorowym, a naszym celem jest zoptymalizowanie wydajności numerycznej obliczeń przy minimalizacji błędów numerycznych oraz błędów wynikłych z uproszczeń mających zwiększyć szybkość wykonywania koniecznych operacji matematycznych.

2 Model

Bazujemy na modelu przedstawionym na poniższym rysunku Zakładamy, że znamy wielkości a, b, c, a nasze zadanie polega na wyliczeniu współrzędnych punktu (x, y). W tym celu zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} (\frac{a}{2} + x)^2 + y^2 = c^2 \\ (\frac{a}{2} - x)^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

redukując y otrzymujemy

$$\frac{a^2}{4} - ax + x^2 + c^2 - \frac{a^2}{4} - ax - x^2 = b^2$$

upraszczając

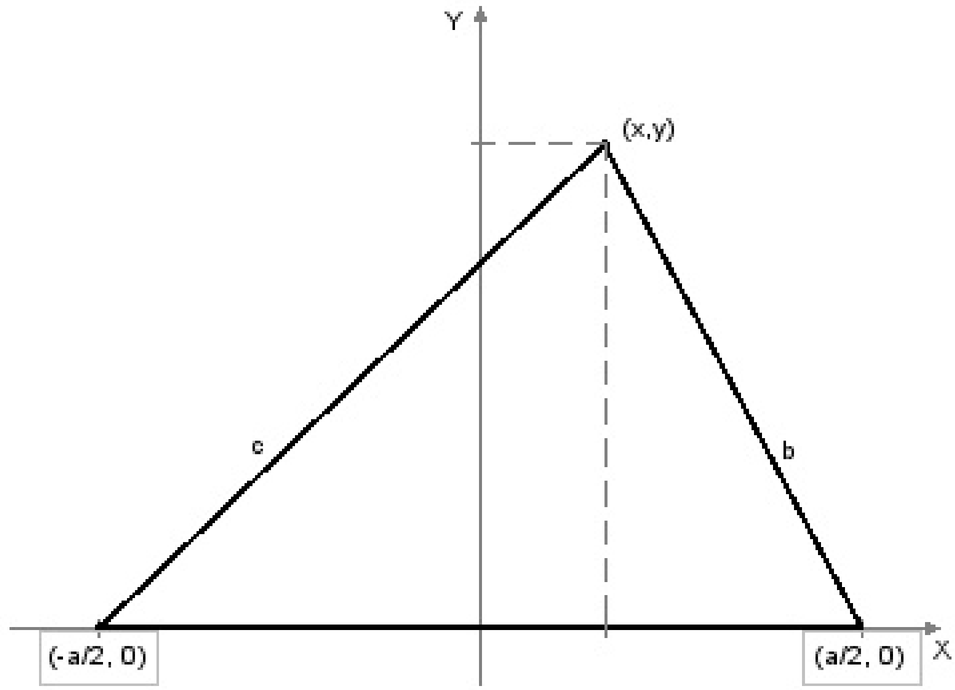
$$x = \frac{c^2 - b^2}{2a},$$

oraz

$$y = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2a}\right)^2}.$$

3 Założenia

Na potrzeby tej pracy zakładam, że szerokość wiązki każdego z sonarów wynosi f a ich maksymalny zasięg d. Przyjmujemy, że pracujemy na 16 bitowym mikrokontrolerze, w którym realizacja funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ jest bardzo czasochłonna.



Rysunek 1: Model reprezentacji przeszkody w systemie dwusonarowym

4 Zmienne

W rozważanym przykładzie będziemy operować na następujących zmiennych

```
unsigned int a, b, c;
unsigned int y;
int x;
```

Zakładamy, że $a, b, c < 256$. Ograniczenie to jest konieczne, aby przy podnoszeniu do kwadratu nie przekroczyć zakresu `unsigned int`. Ponieważ maksymalny zasięg sonarów został przyjęty jako d więc na jednostkową zmianę wartości poszczególnych współczynników przypada $d/256$ zmiany długości rzeczywistej.

Można zmodyfikować górną wartość ograniczenia zmiennych dobierając w odpowiedni sposób kolejność wykonywanych działań (od lewej do prawej) podczas wyznaczania zmiennej x. Mianowicie jeśli użyjemy

```
x = c/2*c/a - b/2*b/a;
```

to otrzymujemy, że $a, b, c < \sqrt{2^{16}/2} = 362$. Możemy tym samym zmniejszyć jednostkę rozdzielczości do $d/362$.

Kolejnym problemem jest skomplikowany wzór na wyliczenie y. W celu uproszczenia obliczeń i wyeliminowaniu konieczności liczenia pierwiastka posłużymy się pewnym przybliżeniem rozważanej powierzchni

$$y(c, x) = \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Posłużymy się rozwinięciem tej funkcji w szereg Taylora w punkcie $(c_0, x_0) = (D, 0)$. W tym celu obliczamy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{c^2 - x^2}} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial c^2} = \frac{\sqrt{c^2 - x^2} - c\frac{c}{\sqrt{c^2-x^2}}}{c^2 - x^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-\sqrt{c^2 - x^2} - x\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}}{c^2 - x^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial c \partial x} = c\frac{x}{(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

i otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} y(D+h, 0+k) \approx\ & y|_{(D,0)} + \tfrac{\partial y}{\partial c}{}_{(D,0)} h + \tfrac{\partial y}{\partial x}|_{D,0)} k \\ & + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2 y}{\partial c^2}|_{(D,0)} h^2 + \tfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{(D,0)} k^2 + 2\tfrac{\partial^2 y}{\partial c \partial x}|_{(D,0)} hk\right) \\ & = D + 1h + 0k + \tfrac{1}{2}(0h^2 - \tfrac{1}{D}k^2 - 0hk) = D + h - \tfrac{1}{2D}k^2 \end{aligned}$$

Tym samym otrzymujemy przybliżenie

$$y(c, x) = c - \frac{1}{2D}x^2.$$

Ze względów numerycznych warto stosować powyższy wzór w postaci

```
y = c-x*x/D/2;
```

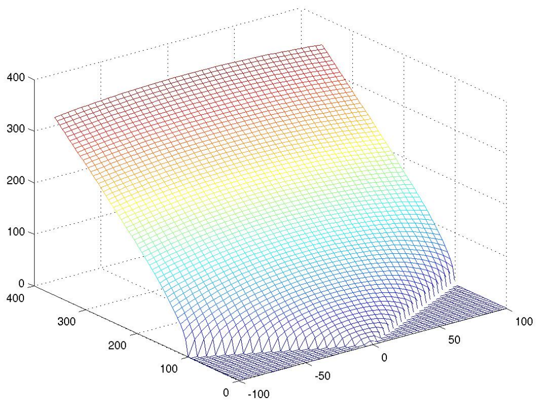
Pozostaje odpowiedzieć na pytanie w jaki sposób należy dokonać wyboru D. Jeśli chcieć zastosować kryterium polegające na minimalizacji maksymalnego błędu,który pojawia się na skutek niedopasowania przybliżenia do rzeczywistej funkcji, to w rozważaniach warto uwzględnić kształt obszaru pracy sonaru.

Jeśli przyjąć, że $= 16^o$, $a = D/7$ to otrzymamy, że najmniejszy błąd pojawia się dla $D = 197$.

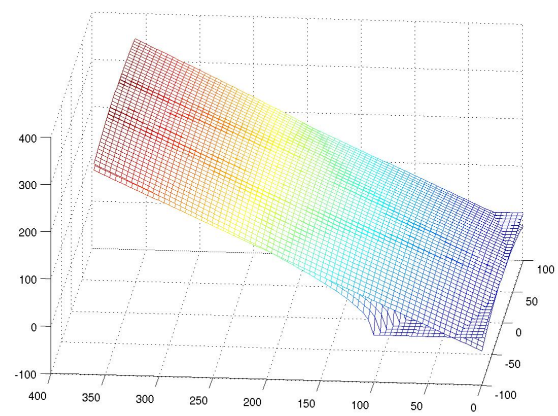
Alternatywne podejście bazuje na spostrzeżeniu, że błąd przybliżenia ma bardzo specuficzny kształt i w okolicy punktu wzgledem którego następuje rozwinięcie w szereg jest on bardzo mały. Stąd propozycja by dynamicznie określać punkt względem którego następuje rozwinięcie. Może się to wydać trochę dziwne, gdyż wymaga to od nas posiadania informacji którą chcemy dopiero uzyskać, niemniej możemy możemy po raz kolejny zastosować pewne uproszczenie. Bazuje ono na fakcie iż przeważnie wiązka sonaru jest dość wązka, a co za tym idze $|x| < |y|$ i w większości przypadków $y \sim b \sim c$. Pomysł polega na tym, aby przyjąć

$$D = \frac{b + c}{2}.$$

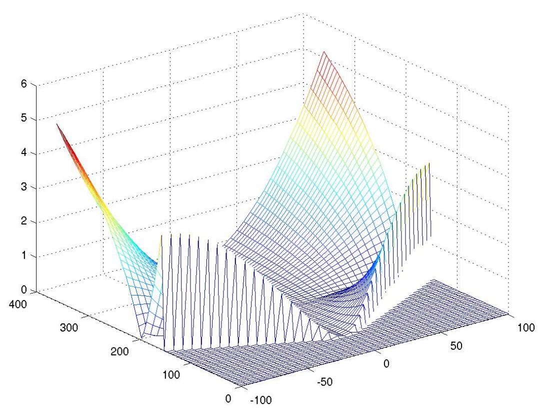
Dzięki rozwinięcie w szereg Taylora powinno być dokonywanie dla odległości bliskiej rzeczywistej.



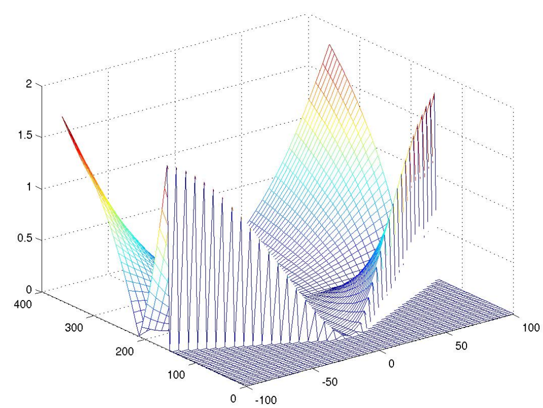
(a) Wykres dokładnej funkcji y



(b) Wykres dokładnej funkcji $y(x)$ oraz zaproponowanego przybliżenia



(c) Procentowy wykres błędu dla zaproponowanego przybliżenia



(d) Procentowy wykres błędu dla zaproponowanego przybliżenia przy optymalnym wyborze D

Rysunek 2: Wykresy funkcji, przybliżenia i błędu przybliżenia